Unisda Journal of Mathematics and Computer Science
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X
Volume 11, Nomor 2, Hal. 8-16

Teorema Polya pada Graf Sederhana yang Tidak Saling Isomorfis Sembilan Simpul

Risang Narendra[1], Novia Ibnu Wulansari[2], Rizka Rizqi Robby[3], Galuh Tyasing Swastika[4]

[1,2,3,4]Universitas Nahdlatul Ulama Blitar, risang.narendra@gmail.com

Abstract. One of the interesting studies in graph theory to study is about graph that are not mutually isomorphic. The purpose of this research is to find the pattern of the number of graphs that are not mutually isomorphic using the Polya theorem. The Polya theorem is related to the cycle index of a group, because the Polya theorem is used to calculate the number off patterns of a group of permutations that make up the cycle index of the group. The Polya theorem consists of the Polya theorem I and the Polya theorem II. The Polya theorem I is used to determine the number of graph that are not isomorphic, while the Polya theorem II is used to determine the shape of the graph. The number of simple graph that are not mutually isomorphic of n = 9 knot is 114.008.254 is known 1 graph whitout side, and 1 graph with 45 side.

Keywords: *Simple Graph, Cycle Index, Isomorphic Graph, Polya Theorem*

Abstrak. Salah satu kajian dalam teori graf yang menarik untuk diteliti adalah tentang graf yang tidak saling isomorfis. Tujuan dalam penelitian ini yaitu mencari pola banyaknya graf yang tidak saling isomorfis menggunakan Teorema Polya. Teorema Polya berkaitan dengan indeks sikel suatu grup, karena Teorema Polya merupakan teorema yang digunakan untuk menghitung banyaknya pola-pola suatu grup permutasi yang membentuk indeks sikel dari grup tersebut. Teorema Polya terdiri dari Teorema Polya I dan Teorema Polya II. Dimana Teorema Polya I digunakan untuk menentukan jumlah banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis, sedangkan Teorema Polya II digunakan untuk menentukan bentuk-bentuk dari graf sederhana yang tidak saling isomorfis tersebut. Banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis dari n = 9 simpul adalah 114.008.254 dan diketahui ada 1 graf tanpa sisi serta 1 graf dengan 45 sisi.

Kata Kunci: *Graf Sederhana, Indeks Sikel, Graf Isomorfis, Teorema Polya*

1 Pendahuluan

Matematika berasal dari bahasa Yunani yakni *mathema* yang berarti pengetahuan, pemikiran, pembelajaran atau sebelumnya disebut ilmu hisab adalah ilmu yang mempelajari hal-hal seperti besaran, struktur, ruang dan perubahan [1]. Matematika adalah ilmu universal yang mendasari ilmu pengetahuan lainnya, sepeti dalam ilmu kimia, ilmu fisika serta ilmu biologi. Peran matematika semakin hari semakin penting, karena banyak informasi penting yang disampaikan orang dengan menggunakan Bahasa matematika seperti tabel, diagram, dan grafik. Teori graf adalah cabang ilmu yang memperlajari sifat-sifat graf. Secara informal, suatu graf adalah himpunan benda-benda yang disebut vertex *(node)* yang terhubung oleh garis *(edge)*. Dalam kehidupan sehari-hari graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti [2, 3]. Beberapa contoh graf yang sering dijumpai antara lain, struktur organisasi, bagan alir, pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik, dan lain-lain [4]. Dengan menggunakan model teori graf yang sesuai, suatu permasalahan menjadi lebih jelas sehingga dapat lebih mudah untuk menganalisisnya. Permasalahan yang dirumuskan dengan menggunakan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya[5].

Teori graf lahir pada tahun 1976 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah Jembatan *Konigsberg* yang sempat terkenal di Eropa. Secara sistematis graf mendefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi G = (V, E) yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul *(vertex* atau *node)* dan E adalah himpunan sisi *(edge)* yang menghubungkan sepasang simpul [2]. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang pesat yakni aplikasinya yang luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu, seperti ilmu komputer, teknik, sains, serta ilmu sosial [6, 7]. Pada umumnya, enumerasi merupakan pencacahan suatu objek tertentu. Salah satu alat bantu yang dapat digunakan untuk mempermudah menyelesaikan permasalahan enumerasi adalah dengan menggunakan teorema Polya (Polya's *Theorem*).

Pada awalnya teorema Polya digunakan dalam perhitungan banyaknya suatu pola molekul yang terbentuk dari gabungan sejumlah atom-atom penyusunnya. teorema Polya dikenalkan oleh seorang matematikawan yaitu George Polya pada tahun 1936. Teorema Polya terdiri dari Teorema Polya I dan Teorema Polya II. Teorema Polya I menjelaskan banyaknya graf yang tidak isomorfis dan Teorema Polya II menjelaskan bentuk-bentuk graf yang tidak isomorfis tersebut. Teorema Polya berkaitan dengan indeks sikel polynomial suatu grup, karena teorema Polya merupakan teorema yang digunakan untuk menghitung banyaknya pola-pola suatu grup permutasi yang membentuk indeks sikel dari grup tersebut [8–11]. Penelitian [11] melakukan enumerasi graf sederhana dengan enam simpul menggunakan Teorema Polya. Penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian tentang graf yang tidak saling isomorfis. Pada penelitian sebelumnya belum ada yang membahas penentuan banyaknya graf sederhana dengan sembilan simpul yang tidak saling isomorfis menggunakan Teorema Polya.

2 Metode Penelitian

2.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Literatur dapat diartikan sebagai sumber ataupun acuan yang digunakan dalam berbagai aktivitas di dunia pendidikan ataupun aktivitas lainnya. Metode studi literatur adalah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca, dan mencatat serta mengolah bahan penelitian [11].

2.2 Teknik Analisis Data

Teknik analisis data yang digunakan adalah studi literatur dengan mempelajari artikel ilmiah dari berbagai jurnal dan buku-buku yang berkaitan dengan topik penelitian. Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

a. Melakukan kajian literatur mengenai Teorema Polya.
b. Mengkaji karakteristik Teorema Polya.
c. Menentukan permutasi indeks sikel dengan menggunakan bantuan program *Maple.*
d. Mengaplikasikan hasil permutasi kedalam Teorema Polya I untuk menentukan banyaknya graf yang tidak saling isomorfis.
e. Mengaplikasikan hasil permutasi kedalam Teorema Polya II untuk menentukan bentuk graf yang tidak saling isomorfis.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Penerapan Teorema Polya Pada Graf 9 Titik

Dalam bagian ini penulis akan membahas uraian untuk menentukan banyaknya graf dan jenis-jenis graf yang tidak saling isomorfik menggunakan teorema Polya dengan order $n = 9$ titik. Apabila n titik pada graf G dikenai permutasi, maka pasangan titik tak berurut (artinya $ab = ba$) dari graf tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan titik tak berurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai sisi, yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut. Jika himpunan permutasi pada titik-titik suatu graf membentuk suatu grup simetri yaitu S_n, maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi-sisi) tersebut juga membentuk suatu grup simetri yaitu R_n. Jadi akan dibentuk indeks sikel dari R_n (permutasi sisi pada graf) dengan membangkitkan indeks sikel pada S_n (permutasi titik pada graf).

3.2 Perkalian Sikel dengan *Maple* untuk Menentukan Indeks Sikel pada Graf 9 Titik

Diberikan graf G dengan himpunan titik $X = \{1,2,3,4, \dots ,9\}$ yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan $n = 9$. Misal S_9 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan X, maka banyaknya anggota dari grup S_9 adalah $n! = 9! = 362880$. Dengan bantuan program *Maple* diperoleh bentuk-bentuk hasil kali sikel yang saling asing dari grup S_9 beserta banyak anggota yang sejenis (**Tabel 1**).

Tabel 1. Bentuk Hasil Kali Sikel S_9

Bentuk	Banyak Anggota Sejenis
(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)	1
(1 2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)	36
(1 2 3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)	168
(1 2 3 4) (5) (6) (7) (8) (9)	756
(1 2 3 4 5) (6) (7) (8) (9)	3024
(1 2 3 4 5 6) (7) (8) (9)	10080
(1 2 3 4 5 6 7) (8) (9)	25920
(1 2 3 4 5 6 7 8) (9)	45360
(1 2 3 4 5 6 7 8 9)	40320
(1 2) (3 4) (5) (6) (7) (8) (9)	378
(1 2) (3 4 5) (6) (7) (8) (9)	2520
(1 2) (3 4 5 6) (7) (8) (9)	7560
(1 2) (3 4 5 6 7) (8) (9)	18144
(1 2) (3 4 5 6 7 8) (9)	30240
(1 2) (3 4 5 6 7 8 9)	25920
(1 2 3) (4 5 6) (7) (8) (9)	3360
(1 2 3) (4 5 6 7) (8) (9)	15120
(1 2 3) (4 5 6 7 8) (9)	24192
(1 2 3) (4 5 6 7 8 9)	20160
(1 2 3 4) (5 6 7 8) (9)	11340
(1 2 3 4) (5 6 7 8 9)	18144
(1 2) (3 4) (5 6) (7) (8) (9)	1260
(1 2) (3 4) (5 6) (7 8) (9)	945
(1 2) (3 4) (5 6 7) (8) (9)	7560
(1 2) (3 4) (5 6 7 8) (9)	11340
(1 2) (3 4) (5 6 7 8 9)	9072
(1 2) (3 4 5) (6 7 8) (9)	10080
(1 2) (3 4 5) (6 7 8 9)	15120
(1 2) (3 4 5 6) (7 8 9)	10760

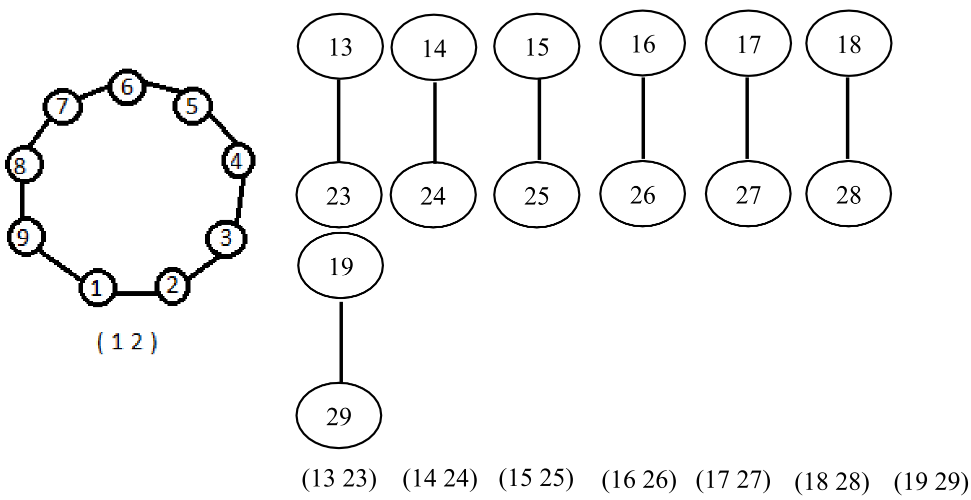
Sehingga tipe untai dan indeks sikel dari bentuk hasil perkalian *cycle* diatas ada 29 yang terlihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Tipe Untai dan Indeks Sikel

Tipe Untai	Banyak anggota	Indeks siklik
[9,0,0,0,0,0,0,0,0]	1	x_1^9
[7,1,0,0,0,0,0,0,0]	36	$x_1^7x_2$
[6,0,1,0,0,0,0,0,0]	168	$x_1^6x_3$
[5,0,0,1,0,0,0,0,0]	756	$x_1^5x_4$
[4,0,0,0,1,0,0,0,0]	3024	$x_1^4x_5$
[3,0,0,0,0,1,0,0,0]	10080	$x_1^3x_6$
[2,0,0,0,0,0,1,0,0]	25920	$x_1^2x_7$
[1,0,0,0,0,0,0,1,0]	45360	x_1x_8
[0,0,0,0,0,0,0,0,1]	40320	x_9
[5,2,0,0,0,0,0,0,0]	378	$x_1^5x_2^2$
[4,1,1,0,0,0,0,0,0]	2520	$x_1^4x_2\ x_3$
[3,1,0,1,0,0,0,0,0]	7560	$x_1^3x_2\ x_4$

Tipe Untai	Banyak anggota	Indeks siklik
[2,1,0,0,1,0,0,0,0]	18144	$x_1{}^2 x_2\, x_5$
[1,1,1,0,0,1,0,0,0]	30240	$x_1 x_2\, x_6$
[0,1,0,0,0,0,1,0,0]	25920	$x_2\, x_7$
[3,0,2,0,0,0,0,0,0]	3360	$x_1{}^3 x_3{}^2$
[2,0,1,1,0,0,0,0,0]	15120	$x_1{}^2 x_3\, x_4$
[1,0,1,0,1,0,0,0,0]	24192	$x_1 x_3\, x_5$
[0,0,1,0,0,1,0,0,0]	20160	$x_3\, x_6$
[1,0,0,2,0,0,0,0,0]	11340	$x_1 x_4{}^2$
[0,0,0,1,1,0,0,0,0]	18144	$x_4\, x_5$
[3,3,0,0,0,0,0,0,0]	1260	$x_1{}^3 x_2{}^3$
[1,4,0,0,0,0,0,0,0]	945	$x_1 x_1{}^4$
[2,2,1,0,0,0,0,0,0]	7560	$x_1{}^2 x_2{}^2 x_3$
[1,2,0,1,0,0,0,0,0]	11340	$x_1 x_2{}^2 x_4$
[0,2,0,0,1,0,0,0,0]	9072	$x_2{}^2 x_5$
[1,1,2,0,0,0,0,0,0]	10080	$x_1\, x_2 x_3{}^2$
[0,1,1,1,0,0,0,0,0]	15120	$x_2\, x_3\, x_4$
[0,1,1,1,0,0,0,0,0]	10760	$x_2\, x_3\, x_4$

Jika himpunan permutasi pada simpul-simpul suatu graf membentuk graf yang membentuk suatu grup simetri (S_n), maka permutasi dari pasangan terurut simpul tersebtu juga membentuk suatu grup permutasi (R_n). Maka akan terbentuk indeks sikel R_n (permutasi sisi pada graf) dengan membengkitkan indeks sikel pada S_9 yang sudah diperoleh. Karena terdapat empat puluh lima sisi pada graf awal yang kemudian menjadi simpul pada graf yang baru, maka permutasi pada P' terdapat 29 sikel dengan panjang satu, dan delapan sikel dengan panjang dua. Sehingga dapat dikatakan, P' mempunyai indeks sikel $x_1^{29} x_2^{8}$. Berikut sebagai ilustrasinya:



Gambar 1. Ilustrasi Perubahan Indeks Sikel

Keseluruhan perbahan indeks sikel S_9 menjadi indeks sikel R_6 dinyatakan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Perubahan Indeks Sikel

No	S_n	R_n	No	S_n	R_n
1	$x_1{}^9$	$x_1{}^{45}$	17	$x_1{}^2x_3\,x_4$	$x_1{}^3x_2{}^2x_3{}^4x_4{}^4x_{12}$
2	$x_1{}^7x_2$	$x_1{}^{29}x_2{}^8$	18	$x_1x_3\,x_5$	$x_1x_3{}^3x_5{}^4x_{15}$
3	$x_1{}^6x_3$	$x_1{}^{21}x_3{}^8$	19	$x_3\,x_6$	$x_3{}^3x_6{}^5$
4	$x_1{}^5x_4$	$x_1{}^{15}x_2x_3{}^7$	20	$x_1x_4{}^2$	$x_1x_2{}^2x_4{}^{10}$
5	$x_1{}^4x_5$	$x_1{}^{10}x_5{}^7$	21	$x_4\,x_5$	$x_2\,x_4{}^2x_5{}^3x_{20}$
6	$x_1{}^3x_6$	$x_1{}^6x_3x_6{}^6$	22	$x_1{}^3x_2{}^3$	$x_1{}^9x_2{}^{18}$
7	$x_1{}^2x_7$	$x_1{}^3x_7{}^7$	23	$x_1x_1{}^4$	$x_1{}^5x_2{}^{20}$
8	x_1x_8	$x_1\,x_4x_8{}^4$	24	$x_1{}^2x_2{}^2x_3$	$x_1{}^5x_2{}^8x_3{}^3x_6{}^6$
9	x_9	$x_9{}^5$	25	$x_1x_2{}^2x_4$	$x_1{}^3x_2{}^6x_4{}^7$
10	$x_1{}^5x_2{}^2$	$x_1{}^{17}x_2{}^{14}$	26	$x_2{}^2x_5$	$x_1{}^2x_2{}^4x_5{}^3x_{10}{}^2$
11	$x_1{}^4x_2\,x_3$	$x_1{}^{11}x_2{}^8x_3{}^6$	27	$x_1\,x_2x_3{}^2$	$x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^9x_6{}^2$
12	$x_1{}^3x_2\,x_4$	$x_1{}^7x_2{}^9x_4{}^5$	28	$x_2\,x_3\,x_4$	$x_1x_2{}^2x_3{}^2\,x_4{}^4x_6\,x_{12}$
13	$x_1{}^2x_2\,x_5$	$x_1{}^4x_2{}^3x_5{}^5x_{10}$	29	$x_2\,x_3\,x_4$	$x_1\,x_2{}^2x_3{}^2\,x_4{}^4x_6\,x_{12}$
14	$x_1x_2\,x_6$	$x_1{}^2x_2{}^2x_3x_6{}^6$			
15	$x_2\,x_7$	$x_1\,x_2x_7{}^4x_{14}$			
16	$x_1{}^3x_3{}^2$	$x_1{}^6x_3{}^{13}$			

Sehingga dengan menggunakan Teorema Polya I diperoleh :

$$Z(S_9: x_1, x_2, \dots, x_9) = \frac{1}{362880}[x_1{}^{45} + 36x_1{}^{29}x_2{}^8 + 168x_1{}^{21}x_3{}^8 + 756x_1{}^{15}x_2x_3{}^7$$
$$+3024x_1{}^{10}x_5{}^7 + 10080x_1{}^6x_3x_6{}^6 + 25920x_1{}^3x_7{}^7 + 45360\,x_1\,x_4x_8{}^4 + 40320x_9{}^5$$
$$+378x_1{}^{17}x_2{}^{14} + 2520x_1{}^{11}x_2{}^8x_3{}^6 + 2520x_1{}^7x_2{}^9x_4{}^5 + 18144x_1{}^4x_2{}^3x_5{}^5x_{10}$$
$$+2520x_1{}^2x_2{}^2x_3x_6{}^6 + 25920x_1\,x_2x_7{}^4x_{14} + 3360x_1{}^6x_3{}^{13}$$
$$+15120x_1{}^3x_2{}^2x_3{}^4x_4{}^4x_{12} + 24192x_1x_3{}^3x_5{}^4x_{15} + 20160x_3{}^3x_6{}^5$$
$$+18144x_2\,x_4{}^2x_5{}^3x_{20} + 1260x_1{}^9x_2{}^{18} + 945x_1{}^5x_2{}^{20} + 7560x_1{}^5x_2{}^8x_3{}^3x_6{}^6$$
$$+11340x_1{}^3x_2{}^6x_4{}^7 + 9072x_1{}^2x_2{}^4x_5{}^3x_{10}{}^2 + 10080x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^9x_6{}^2$$
$$+15120x_1x_2{}^2x_3{}^2\,x_4{}^4x_6\,x_{12} + 10760x_1\,x_2{}^2x_3{}^2\,x_4{}^4x_6\,x_{12}]$$

... (1)

Diberikan $f: X \to Y$ dengan $|Y| = r$. Pada graf sederhana hanya trdapat dua keadaan pada himpunan Y, yaitu ada himpunan sisi pada himunan simpul dan tidak ada sisi pada himpunan simpul, sehingga $r = 2$ maka menyebabkan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 2$, dengan memasukkan nilai tersebut pada persamaan (1) diperoleh:

$$Z(S_9: x_1, x_2, \dots, x_9) = \frac{1}{362880}[24^5 + 3^6.2^{29}.2^8 + 168.2^{21}.2^8 +$$
$$756.2^{15}.2.2^7 + 3024.2^{10}.2^7 + 10080.2^6.2.2^6 + 25920.2^3.2^7 +$$
$$45360.2.2.2^4 + 40320.2^5 + 378.2^{17}.2^{14} + 2520.2^{11}.2^8.2^6 +$$
$$2520.2^7.2^9.2^5 + 18144.2^4.2^3.2^5.2 + 2520.2^2.2^2.2.2^6 +$$

$25920.2.2.2^4.2 + 3360.2^6.2^{13} + 15120.2^3.2^2.2^4.2^4.2 + 24192.2.2^3.2^4.2 + 20160.2^3.2^5 + 11340.2.2^2.2^{10} + 18144.2.2^2.2^3.2 + 1260.2^9.2^{18} + 945.2^5.2^{20} + 7560.2^5.2^8.2^3.2^6 + 11340.2^3.2^6.2^7 + 9072.2^2.2^4.2^3.2^{10} + 10080.2^2.2^2.2^9.2^2 + 15120.2.2^2.2^2.2^4.2.2 + 10760.2.2^2.2^2.2^4.2.2\,]$ …(2)

Jadi, untuk graf sederhana dengan Sembilan simpul, maka akan terdapat 114.008.254 graf yang tidak saling isomorfis.

Ambil dua pola pada himpunan Y, misalkan T = tidak mempunyai sisi dan A = mempunyai sisi, kemudian substitusikan :

$x_1 = T + A, x_2 = T^2 + A^2, x_3 = T^3 + A^3, x_4 = T^4 + A^4, x_5 = T^5 + A^5, x_6 = T^6 + A^6, x_7 = T^7 + A^7, x_8 = T^8 + A^8, dan\ x_9 = T^9 + A^9$ pada persamaan (1), sehingga diperoleh :

$$Z(S_9: x_1, x_2, \dots, x_9) = \frac{1}{362880}[(T+A)^{45} + 36(T+A)^{29}(T^2+A^2)^8$$
$$+168(T+A)^{21}(T^3+A^3)^8 + 756(T+A)^{15}(T^2+A^2)(T^3+A^3)^7$$
$$+3024(T+A)^{10}(T^5+A^5)^7 + 10080(T+A)^6(T^3+A^3)(T^6+A^6)^6$$
$$+25920(T+A)^3(T^7+A^7)^7 + 45360(T+A)(T^4+A^4)(T^8+A^8)^4$$
$$+40320(T^9+A^9)^5 + 378(T+A)^{17}(T^2+A^2)^{14} + 2520(T+A)^{11}$$
$$(T^2+A^2)^8(T^3+A^3)^6 + 2520(T+A)^7(T^2+A^2)^9(T^4+A^4)^5$$
$$+18144(T+A)^4(T^2+A^2)^3(T^5+A^5)^5(T^{10}+A^{10}) + 2520(T+A)^2(T^2+A^2)^2$$
$$(T^3+A^3)(T^6+A^6)^6 + 25920(T+A)(T^2+A^2)(T^7+A^7)^4(T^{14}+A^{14})$$
$$+3360(T+A)^6(T^3+A^3)^{13} + 15120(T+A)^3(T^2+A^2)^2(T^3+A^3)^4$$
$$(T^4+A^4)^4(T^{12}+A^{12}) + 24192(T+A)(T^3+A^3)^3(T^5+A^5)^4(T^{15}+A^{15})$$
$$+20160(T^3+A^3)^3(T^6+A^6)^5 + 11340(T+A)(T^2+A^2)^2(T^4+A^4)^{10}$$
$$+18144(T^2+A^2)(T^4+A^4)^2(T^5+A^5)^3(T^{20}+A^{20}) + 1260(T+A)^9(T^2+A^2)^{18}$$
$$+945(T+A)^5(T^2+A^2)^{20} + 7560(T+A)^5(T^2+A^2)^8(T^3+A^3)^3(T^6+A^6)^6$$
$$+11340(T+A)^3(T^2+A^2)^6(T^4+A^4)^7 + 9072(T+A)^2(T^2+A^2)^4(T^5+A^5)^3$$
$$(T^{10}+A^{10})^2 + 10080(T+A)^2(T^2+A^2)^2(T^3+A^3)^9(T^6+A^6)^2 + 15120(T+A)$$
$$(T^2+A^2)^2(T^3+A^3)^2(T^4+A^4)^4(T^6+A^6)(T^{12}+A^{12}) + 10760(T+A)$$
$$(T^2+A^2)^2(T^3+A^3)^2(T^4+A^4)^4(T^6+A^6)(T^{12}+A^{12})]$$

Dilakukan perkalian pada setiap suku di ruas kanan kemudian sederhanakan, sehingga diperoleh:

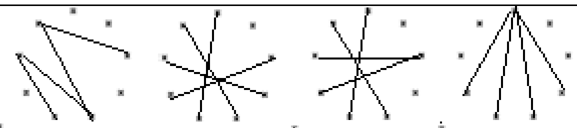
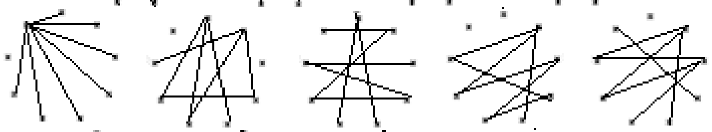
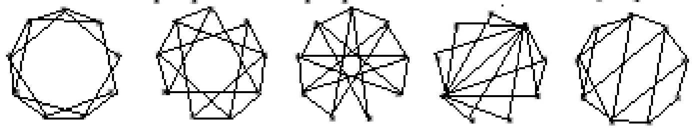
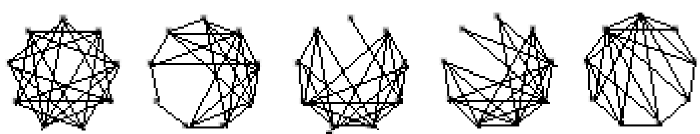
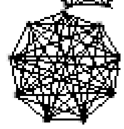
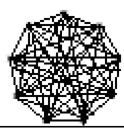
$Z(S_9: x_1, x_2, \dots, x_9) = T^{45} + T^{44}A + 2T^{43}A^2 + 6T^{42}A^3 + 19T^{41}A^4 + 67T^{40}A^5 + 188T^{39}A^6 + 504T^{38}A^7 + 1.904T^{37}A^8 + 5.916T^{36}A^9 + 19.652T^{35}A^{10} + 50.134T^{34}A^{11} + 129.054T^{33}A^{12} + 296.629T^{32}A^{13} + 630.089T^{31}A^{14} + 2.745.367T^{30}A^{15} + 22.219.218T^{29}A^{16} + 4.699.873T^{28}A^{17} + 5.600.886T^{27}A^{18} + 68.461T^{26}A^{19} + 10.076.755T^{25}A^{20} + 11.915T^{24}A^{21} + 11.588.332T^{23}A^{22} + 12.955.566T^{22}A^{23} + 13.667.296T^{21}A^{24} + 9.058.277T^{20}A^{25} + 8.855.577T^{19}A^{26} + 8.887.873T^{18}A^{27} + 6.679.979T^{17}A^{28} + 829.627T^{16}A^{29} + 2.707.507T^{15}A^{30} + 603.586T^{14}A^{31} + 296.629T^{13}A^{32} + 127.284T^{12}A^{33} + 51.016T^{11}A^{34} + 19.652T^{10}A^{35} +$

$$7.837T^9A^{36} + 2.340T^8A^{37} + 784T^7A^{38} + 228T^6A^{39} + 67T^5A^{40} + 19T^4A^{41} + 6T^3A^{42} + 2T^2A^{43} + TA^{44} + A^{45}$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri dari 9 himpunan titik akan terdapat graf-graf yang tidak saling isomorfik yang memenuhi rincian sebagai berikut :
1 graf tanpa sisi, 1 graf dengan 1 sisi, 2 graf dengan 2 sisi, 6 graf dengan 3 sisi, 19 graf dengan 4 sisi, 67 graf dengan 5 sisi, 188 graf dengan 6 sisi, 504 graf dengan 7 sisi, 1.904 graf dengan 8 sisi, 5.916 graf dengan 9 sisi, 19.652 graf dengan 10 sisi, 50.134 graf dengan 11 sisi, 129.054 graf dengan 12 sisi, 296.629 graf dengan 13 sisi, 630.089 graf dengan 14 sisi, 2.745.367 graf dengan 15 sisi, 22.219.218 graf dengan 16 sisi, 4.699.873 graf dengan 17 sisi. 5.600.886 graf dengan 18 sisi, 68.461 graf dengan 19 sisi, 10.076.755 graf dengan 20 sisi, 11.915 graf dengan 21 sisi, 11.588.332 graf dengan 22 sisi, 12.955.566 graf dengan 23 sisi, 13.667.296 dengan 24 sisi, 9.058.277 graf dengan 25 sisi, 8.855.577 graf dengan 26 sisi, 8.887.873 graf dengan 27 sisi, 6.679.979 graf dengan 28 sisi, 829.627 graf dengan 29 sisi, 2.707.507 graf dengan 30 sisi, 603.686 graf dengan 31 sisi, 296.629 graf dengan 32 sisi, 127.284 dengan 33 sisi, 51.016 graf dengan 34 sisi, 19.652 graf dengan 35 sisi, 7.873 graf dengan 36 sisi, 2.340 graf dengan 37 sisi, 784 graf dengan 38 sisi, 228 graf dengan 39 sisi, 67 graf dengan 40 sisi, 19 graf dengan 41 sisi, 6 graf dengan 42 sisi, 2 graf dengan 43 sisi, 1 graf dengan 44 sisi, dan 1 graf dengan 45 sisi.

Berdasarkan teorema Polya II diperoleh bentuk-bentuk graf yang tidak isomorfik dengan bantuan software Maple, berikut beberapa sampel untuk gambar graf yang tidak saling isomorfik (Tabel 2).

Tabel 4 Contoh Graf Yang Tidak Saling Isomorfis 9 Simpul

Banyaknya Sisi	**Contoh Gambar**
19 graf dengan 4 sisi	
504 graf dengan 7 sisi	
22.219.218 graf dengan 16 sisi	
12.955.566 graf dengan 23 sisi	
19 graf dengan 41 sisi	
6 graf dengan 42 sisi	

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan yaitu terdapat 45 jenis graf yang tidak saling isomorfis yang dapat dibuat dari titik sebanyak n, dengan n = 9 simpul serta banyaknya graf yang tidak isomorfis yang terbentuk dari Sembilan simpul ada 114.008.254 buah graf.

Penelitian mengenai Teorema Polya tidak hanya dapat dilakukan pada graf sederhana yang tidak saling isomorfik, namun masih dapat dikembangkan lagi pada pewarnaan graf dan enumerasi pada graf berarah.

5 Daftar Pustaka

[1] Siang, J.J. *Matematika diskrit dan aplikasinya pada ilmu komputer*. Yogyakarta: ANDI, 2009.

[2] Marsudi. *Teori Graf*. Malang, Indonesia: Universitas Brawijaya Press, 2016.

[3] Wilson, R.J. *Pengantar Teori Graf*. Jakarta: Erlangga, https://perpustakaan.binadarma.ac.id/opac/detail-opac?id=6952 (2010, accessed 25 December 2025).

[4] Hidayat, N. *Cara Mudah Memahami Struktur Aljabar: Teori, Latihan Soal dan Bukti lengkap*. Malang, Indonesia: Universitas Brawijaya Press, 2017.

[5] Munir, R. *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung, Indonesia: Indformatika, 2012.

[6] Purnomo, W.L. *Penggunaan Teorema Polya Dalam Enumerasi Graf*. Universitas Negeri Semarang, https://lib.unnes.ac.id/752/ (2011, accessed 25 December 2025).

[7] Suryanti, S. *Teori grup (Struktur aljabar 1)*. 1st ed. Gresik, Indonesia: UMG Press, http://118.97.240.83:8026/inlislite3/opac/detail-opac?id=82187 (2017, accessed 25 December 2025).

[8] Hamidah, I.N. *Pola Banyaknya Graf Yang Tidak Saling Isomorfik Menggunakan Teorema Polya*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, 2018.

[9] Kartasasmita, B.G, Ansjar, M, Martono, K, dkk. *Kamus Matematika : matematika dasar*. Jakarta: Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa, https://repositori.kemendikdasmen.go.id/2938/ (1993, accessed 25 December 2025).

[10] Purwanto. *Matematika Diskrit*. Malang, Indonesia: IKIP Malang, 1998.

[11] Rosalianti, V.T., Suhery, C., Kusumastuti, N. Penggunaan Teorema Polya Dalam Menentukan Banyaknya Graf Sederhana Yang Tidak Saling Isomorfis. *BIMASTER : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*; 2. Epub ahead of print 1 April 2013. DOI: 10.26418/bbimst.v2i1.1631.

[12] Soleha, M.S., Usadh, I.G.N.R., Jamil, A. Enumerasi Graf Sederhana dengan Enam Simpul Menggunakan Teorema Polya. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications* 2017; 14: 37–44.